

Aula 10: Exemplos e Aplicações do T. de Noether

1. Recuperar caso de transl. temporal (energia)

- tomando $t' = t + \epsilon$; $q'_i = q_i \Rightarrow \psi_i = 0$; $X = 1$:

$$\text{substituindo: } \underline{-C = h = \text{cte}}$$

2. Recuperar caso de rotações (mom. angular)

- tomando $q_1 = x_1, q_2 = y_1, q_3 = z_1, \dots, q_{3N} = z_N$

$$\delta \vec{\theta} = \delta \theta \hat{n} \Rightarrow \begin{cases} X = 0, \\ \psi_1 = (\hat{n} \times \vec{r}_1)_x, \psi_2 = (\hat{n} \times \vec{r}_1)_y, \psi_3 = (\hat{n} \times \vec{r}_1)_z \dots \psi_{3N} = (\hat{n} \times \vec{r}_N)_z \end{cases}$$

$$\text{substituindo: } -C = \sum_{i=1}^N \sum_{a=x,y,z} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} (\hat{n} \times \vec{r}_i)_a = \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \cdot (\hat{n} \times \vec{r}_i)$$

perm. cíclica

$$\uparrow \hat{n} \cdot \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \text{cte}$$

3. Recuperar caso de translações espaciais [mom. linear]

$$q_1 = x_1, q_2 = x_2 \dots q_N = x_N$$

$$t' = t, \vec{r}'_i = \vec{r}_i + \epsilon \hat{n}, \text{ Tomando } q_{N+1} = y_1 \dots q_{2N} = y_N$$

$$q_{2N+1} = z_1 \dots q_{3N} = z_N$$

$$\rightarrow X = 0, \psi_i = \hat{n}_x, i=1 \dots N; \hat{n}_y, i=N+1 \dots 2N; \hat{n}_z, i=2N+1 \dots 3N$$

$$\rightarrow -C = \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \psi_k = \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \cdot \hat{n} = \hat{n} \cdot \vec{P} = \text{cte}$$

Exemplo 2.7.3: OH amortecido

Já vimos anteriormente que a lagrangeana $L = e^{\lambda t} \left(\frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{m\omega^2}{2} x^2 \right)$ leva à eq. de mov. do OH amortecido.

Considere a transformação finita

$$t' = t + \alpha, \quad x'(t') = e^{-\frac{\lambda \alpha}{2}} x(t)$$

[Interpretação geométrica: translação temporal e simultaneamente dilatação do espaço (p/ $\alpha > 0$, todas as posições são reduzidas em valor absoluto)]

Sob essa transformação, a ação é na verdade invariante!

$$S' = \int_{t_1}^{t_2'} e^{\lambda t'} \left(\frac{m}{2} \frac{dx'}{dt'}^2 - \frac{m\omega^2}{2} x'^2 \right) dt' = \int_{t_1+\alpha}^{t_2+\alpha} \frac{e^{\lambda t} \lambda \alpha}{e^{\lambda t}} \left[\frac{dx}{dt}^2 - \frac{m\omega^2}{2} x^2 \right] dt' = \int_{t_1}^{t_2} L dt = S !$$

Para podermos aplicar o Teorema de Noether, precisamos da versão infinitesimal da transformação (a qual, se composta muitas vezes, resulta na transf. finita):

$$\left\{ \begin{array}{l} \boxed{t' = t + \epsilon} \\ \boxed{x'(t') = \left(1 - \frac{\epsilon \lambda}{2}\right) x(t) = x(t) - \frac{\epsilon \lambda}{2} x(t)} \end{array} \right. \rightarrow \boxed{X = 1, \quad \Psi = -\frac{\lambda}{2} x}$$

Pelo teorema, a quantidade conservada neste caso é

$$C = e^{\lambda t} m \dot{x} \left(\frac{\lambda}{2} x + \dot{x} \right) - e^{\lambda t} \left(\frac{m \dot{x}^2}{2} - \frac{m \omega^2 x^2}{2} \right) = \boxed{e^{\lambda t} \left[\frac{m \dot{x}^2}{2} + \frac{m \omega^2 x^2}{2} + \frac{m \lambda x \dot{x}}{2} \right]}$$

$$\begin{aligned} \text{checando: } \frac{dC}{dt} &= \lambda C + m e^{\lambda t} \left[\dot{x} \ddot{x} + \omega^2 x \dot{x} + \frac{\lambda}{2} \dot{x}^2 + \frac{\lambda}{2} x \ddot{x} \right] = \lambda C + m e^{\lambda t} \left[\left(\dot{x} + \frac{\lambda}{2} x \right) \overbrace{\left(-\omega^2 x - \lambda \dot{x} \right)}^{\ddot{x}} + \omega^2 x \dot{x} + \frac{\lambda}{2} \dot{x}^2 \right] \\ &= \lambda C + m e^{\lambda t} \left[-\frac{\lambda \dot{x}^2}{2} - \frac{\lambda \omega^2 x^2}{2} - \frac{\lambda^2 x \dot{x}}{2} \right] = 0! \end{aligned}$$

- " -

Generalização do Teorema de Noether

Na verdade, na dedução acima impusemos uma condição, $\Delta S = 0$, que é desnecessariamente restritiva. Se quisermos apenas garantir que a física do sistema antes e depois da transf. infinitesimal permaneça a mesma, basta garantirmos que as condições de extremalização $\delta S = 0$ e $\delta S' = 0$ sejam equivalentes. Para isto, basta que $S' = S + cte$. Isso equivale à liberdade das Lagrangianas equivalentes: basta existir uma função $G(q, t)$ tal que

$$S' \equiv \int_{t_1}^{t_2} L(q', \frac{dq'}{dt'}, t') dt' = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \frac{dq}{dt}, t) + \epsilon \frac{dG(q, t)}{dt} dt = S + cte$$

Olhando a dedução, vemos que nesse caso

$$N = \frac{d}{dt} \left[\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - hX + G \right] = 0 \rightarrow \boxed{C \equiv \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - hX + G = \text{cte}}$$

é a constante de Noether

Exemplo:

Considere uma partícula carregada submetida a campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ uniformes e estáticos. Nesse caso é fisicamente claro que o sistema é invariante por translações infinitesimais nas 3 direções x, y, z , descritos como acima por $X=0$, $\Psi_i = \delta_{ix}$. Porém, o lagrangeano L não é, ele próprio, invariante: Tomando $\phi, \vec{A}$ satisfazendo $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$, $\nabla \times \vec{A} = \vec{B} = \text{cte}$ (p.ex.: $\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{r}$), e lembrando que $L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - e\phi(\vec{r}) + \frac{e}{c} \vec{v} \cdot \vec{A}(\vec{r})$ segue-se que, após uma translação $\vec{r}' = \vec{r} + \varepsilon \hat{e}_i$:

$$L' - L = -e[\phi(\vec{r}') - \phi(\vec{r})] + \frac{e}{c} \vec{v} \cdot [\vec{A}(\vec{r}') - \vec{A}(\vec{r})]$$

$$= \underbrace{-e \vec{\nabla} \phi \cdot (\varepsilon \hat{e}_i)}_{\varepsilon e E_i(\vec{r})} + \underbrace{\frac{e}{c} \frac{1}{2} \vec{v} \cdot (\vec{B} \times (\varepsilon \hat{e}_i))}_{= \frac{\varepsilon e}{2c} (\vec{v} \times \vec{B})_i} \neq 0$$

Podemos ver que $\delta L \neq 0$, mas $\delta L = \frac{d}{dt} \left[e E_i t + \frac{e}{2c} (\vec{r} \times \vec{B})_i \right] = \frac{d}{dt} F_i(\vec{r}, t) \quad !$

A constante de Noether correspondente é então:

$$C_i(\vec{r}, \vec{v}, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i - h + G_i(\vec{r}, t) = -m\dot{x}_i - \frac{e}{c} A_i + e E_i t + \frac{e}{2c} (\vec{r} \times \vec{B})_i$$
$$= - \left[m\dot{x}_i - e E_i t + \frac{e}{c} (\vec{r} \times \vec{B})_i \right]$$

Considerando as 3 direções, temos o vetor conservado

$$\vec{C}(\vec{r}, \vec{v}, t) = m\vec{v} - e t \vec{E} - \frac{e}{c} (\vec{r} \times \vec{B})$$

Vemos que a relação $\frac{d\vec{C}}{dt} = 0$ equivale a $m\vec{a} = e \left[\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right]$ (Fça de Lorentz!)

Em outras palavras, podemos concluir que, no caso de $\vec{B}, \vec{E}$ estáticos, a expressão da força de Lorentz é uma consequência da invariância translacional! (para $\vec{E}, \vec{B}(\vec{r}, t)$ variáveis, a quantidade $\vec{C}$ não é mais conservada, embora a expressão para a força continua é claro válida).

Note ainda que esta quantidade conservada não é igual ao vetor momento canonicamente conjugado à variável de posição, o qual como vimos vale

$$\vec{p} \equiv \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = m\vec{v} + \frac{e}{c} \vec{A} = m\vec{v} - \frac{e}{2c} (\vec{r} \times \vec{B}) \neq \vec{C}$$